Sólidos platónicos en el salón de clases. Taller de matemáticas para docentes de educación secundaria

Platonic solids in the classroom. Mathematics workshop for secondary education teachers

†Alejandro Carrillo Altamirano*

Fecha de recepción: 11 de diciembre de 2022
Fecha de aceptación: 9 de diciembre de 2023

Resumen

Este artículo tiene el propósito de reportar los resultados de la implementación del taller de matemáticas *Sólidos Platónicos* en un grupo de 15 docentes en servicio en secundarias generales, técnicas y de telesecundaria, que se capacitaron en el Centro de Actualización del Magisterio en la Ciudad de México. La intervención se sustentó en la teoría por descubrimiento del pedagogo Jerome Bruner y en el enfoque del pensamiento divergente y convergente en matemáticas. Se concluye que la metodología tradicional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas puede modificarse al utilizarse material concreto en el aprendizaje y el apoyo del análisis algebraico en la construcción de los cinco poliedros regulares o sólidos platónicos —Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro—, lo que propició la reflexión, el análisis y la actitud crítica de los alumnos-docentes en la resolución de problemas.

Palabras clave:

Polígonos regulares, Poliedro regulares, Sólidos platónicos.

Abstract

This article has the purpose of reporting the results of the implementation of the Platonic Solids mathematics workshop in a group of 15 in-service teachers in general, technical and telesecundaria secondary schools, who were trained at the Teaching Update Center in Mexico City. The intervention was based on the discovery theory of pedagogue Jerome Bruner and the approach of divergent and convergent thinking in mathematics. It is concluded that the traditional methodology of teaching-learning of mathematics can be modified by using concrete material in learning and the support of algebraic analysis in the construction of the five regular polyhedra or Platonic solids - Tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron and icosahedron —, which encouraged the reflection, analysis and critical attitude of the student-teachers in solving problems.

Keywords:

Regular polygons, Regular polyhedron, Solid platonics.

* Centro de Actualización de Magisterio en la Ciudad de México.

Introducción

La educación es el medio que hace posible el desarrollo de los individuos, el cual es integral cuando se propician valores, facultades cognitivas y físicas. Para el desarrollo cognitivo, en esta propuesta se trabajó en el marco de la teoría por descubrimiento de Bruner (1972) con un enfoque de investigación de corte experimental en el la tarea del docente fue favorecer el aprendizaje de los alumnos, a través de material concreto y el análisis algebraico, en la construcción de los cinco poliedros regulares o Poliedros Platónicos, descubiertos por el filósofo griego Platón en el siglo IV antes de nuestra era. El análisis algebraico se llevó a cabo a partir del dogma: para satisfacer las características de un poliedro regular, deben cumplir con ciertas propiedades invariantes como objeto matemático.

Existe una variedad de poliedros que se nos presentan de forma natural en la vida real. Por ejemplo, en los poliedros regulares que aparecen en la formación de los minerales y cristales, el cubo se forma en los cristales de sal común y en el mineral de pirita. Los poliedros regulares no son los únicos que existen; podemos imaginar otros como los sólidos arquimedianos o los de Kepler, los prismas y las pirámides, los antiprismas, los poliedros irregulares y los poliedros estrellados, etcétera.

Los poliedros regulares, conocidos también como sólidos platónicos, presentan mayor interés para su estudio en el ámbito escolar, al igual que la geometría plana, que aborda los polígonos regulares, y la geometría sólida que estudia los cuerpos con análogas características en cuanto a la regularidad.

Justificación

Desarrollar un pensamiento matemático en el salón de clases, es un proceso complejo para el docente. El nuevo modelo educativo, en su propuesta curricular, pretende que los alumnos desarrollen formas de razonar diferentes a las metodologías tradicionales, y que desplieguen un pensamiento de naturaleza lógica, analítica y cuantitativa, que involucre el uso de estrategias no convencionales (Prieto, 2005). La metáfora pensar <fuera de la caja> implica un razonamiento divergente, novedoso o creativo, que puede ser una buena aproximación al pensamiento matemático.

Este tipo de pensamiento lo utilizan los matemáticos profesionales para resolver problemas provenientes de distintos contextos, ya sea de la vida real o de la ciencia o matemáticas Morris (1998). Este nuevo enfoque educativo de las matemáticas puede implicar el desánimo de los profesores, porque para ellos se trata de una misión imposible de lograr; sin embargo, permite que los alumnos pueden tener un acercamiento a este tipo de razonamiento, donde impera el pensamiento creativo en sus dos facetas: pensamiento divergente y pensamiento convergente. El primero consiste en la habilidad para pensar de manera original y elaborar nuevas ideas, mientras que el segundo se relaciona con la capacidad crítica y lógica para evaluar alternativas y seleccionar las más apropiadas; ambas formas de pensamiento juegan un papel fundamental en la resolución de problemas.

Ángel y Bautista (2001) comentan que los alumnos deben convertirse en alumnos creativos, capaces de un alto grado de raciocinio, flexivos, críticos, dotados de recursos y habilidades matemáticas, que se utilicen Por ello, en nuestra propuesta, se invita al profesor a recurrir al uso de material concreto para la construcción de los cinco sólidos platónicos, y, al mismo tiempo, efectuar un análisis algebraico para la comprensión de la construcción, y determinar el número de caras que inciden en un vértice.

El uso de material concreto hizo explicita la comprensión de la construcción de los cinco cuerpos platónicos, debido a que el medio de percepción de un alto porcentaje de los participantes del grupo seleccionado para este estudio, era Kinestésico. Como ya se mencionó, la dinámica de trabajo se dio en el marco de la teoría por descubrimiento de Brunner (2017), pasando de lo concreto, es decir, del análisis de las construcciones geométricos de los poliedros, a lo icónico de las representaciones de los poliedros, y, de ahí a la abstracción —razonamiento algebraico—.

La educación, desde estas posturas, requiere de cambios de paradigmas en las prácticas educativas. Por ejemplo, los contenidos no deben proporcionarse por el docente, sino que deben ser descubiertos progresivamente por los estudiantes. Bruner (1972) plantea que los alumnos deben aprender a través de un descubrimiento guiado, esto es, propiciado por una exploración motivada por la curiosidad, donde la labor del docente no es explicar contenidos acabados, sino suministrar material idóneo para propiciar, en los estudiantes, actitudes positivas de estrategias de observación, comparación, reflexión y análisis.

Los cinco poliedros regulares —tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro—, como ya se dijo, fueron descubiertos por Platón, quien concebía que el mundo estaba constituido por cuatro principios básicos: tierra, fuego, aire y agua. Según este filósofo, la tierra corresponde al cubo, es decir, a la forma más sólida y menos móvil; el fuego, al tetraedro porque es el sólido que tiene la forma más aguda y móvil; el aire, al octaedro, debido a que las partículas de aire tienen la propiedad de ser ligeras y poder flotar; y el icosaedro se asemeja a las partículas del agua, porque su forma le permite resbalar por cualquier superficie.

El dodecaedro fue considerado por Platón como símbolo del universo —así lo expresó en su libro Timeo (1900)—. Esta concepción perdura aún en nuestra época, como la esfera homológica de Poincaré (Lozano 2017), donde se concibe al universo como un dodecaedro. En el año 2001, por medio del satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) de la NASA, se hicieron mediciones de la radiación cósmica y se detectó que la amplitud de las ondas halladas tiene un límite. Con esta evidencia, en el 2007, el astrofísico Jean Pierre Luminet propuso que el universo tiene la forma de la esfera homológica de Poincaré.

Como se menciona en líneas anteriores, los poliedros regulares aparecen en la naturaleza de forma nativa. Para entender la estructura de los minerales, se la ve con muchos elementos cristalinos, como una estructura atómica que obedece a la forma de tales poliedros.

Recordemos que otras substancias que aparecen de forma natural serían los cristales de sal común que aparecen en el cubo; el tetraedro, en los del sodio sulfantimoniato; y en el octaedro, en los del alumbre de cromo. Es por ello que los poliedros se han utilizado en temas cristalográficos relacionados fundamentalmente con la geología y la química. También se emplean en la industria, la ingeniera y la arquitectura y como virus donde los poliedros, son entidades biológicas microscópicas.

Metodología

La investigación es de tipo experimental con profesores de matemáticas de educación básica en servicio. La intervención implementa la enseñanza y el aprendizaje por descubrimiento, con el objetivo de observar el aprendizaje de la construcción de los cinco poliedros regulares. El estudio pretendió construir relaciones causa y efecto en la variable dependiente —aprendizaje de los participantes ,causadas por la variable independiente: la aplicación de estrategias de enseñanza —taller con material concreto y análisis algebraico— sobre la construcción de los cinco cuerpos platónicos, (Claret, 2005).

El estudio se realizó considerando la población de los docentes en servicio frente a grupo en la modalidad de secundarias generales, técnicas y telesecundaria, que se capacitan en el Centro de Actualización del

Magisterio en la Ciudad de México. Del total de ese universo, se seleccionó al azar un grupo de 15 participantes con quienes fue implementada esta propuesta de intervención, en la modalidad de taller.

Los poliedros regulares son cuerpos cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí, —las caras pueden ser triángulos, cuadrados y pentágonos— , de modo que en cada vértice concurren el mismo número de caras. Los siguientes resultados muestran los logros que obtuvieron los alumnos docentes-participantes en las construcciones de los cinco cuerpos platónicos, con recursos de material concreto, como la cartulina— Se analizaron las construcciones geométricas (Sessa,2008), al mismo tiempo que se razonó en el análisis algebraico.

Para beneficiar el proceso de aprendizaje por descubrimiento, se implementó como estrategia de enseñanza, el taller denominado *Cuerpos Platónicos*, que consideró las siguientes actividades:

1. Diagnóstico exploratorio inicial de los conocimientos previos sobre los poliedros.
2. Exposiciones teóricas del conductor sobre los contenidos del Taller.
3. Construcción de los poliedros regulares con material concreto— analizando y explorando cuáles eran posibles en su construcción—.
4. Análisis algebraico de la construcción de los poliedros regulares.
5. Diagnóstico exploratorio final de conocimientos.

En un primer momento, la propuesta para la construcción y análisis de los poliedros platónicos se desarrolló con material concreto en el salones de clases, donde a los estudiantes se les proporcionaron polígonos regulares —triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares— recortados y con pestañas a los lados para pegar y formar los poliedros, bajo dos condiciones necesarias en el pegado: que en un mismo vértice incidan las mismas caras — triangulares , cuadradas u otras— y el mismo número de caras, y, en un segundo momento efectuar el análisis algebraico, a través de forma de Euler.

Resultados

En la construcción material de los poliedros, el alumno- docente se enfrentó con el conflicto de que al pegar dos triángulos solo se forman dos caras que no se cerraban (fig. 1), pero si se pegan tres entre sí, se forma un vértice del poliedro, donde inciden tres caras (fig. 2); y si a estas tres se les pega una cuarta, se forma un tetraedro (fig. 3). Sin embargo, si a las tres caras que se tenían, se les pegaban otras tres, se forma un poliedro irregular (fig. 5). Sobre este punto, los alumnos investigaron el nombre del sólido y cuáles eran las condiciones por la que no se consideraba un poliedro regular. En esta dinámica de reconstrucción, al ir aumentando las incidencias de caras triangulares en un vértice, el estudiante formaba todos los posibles poliedros regulares que se forman con caras triangulares, al mismo tiempo que el estudiante iba desarrollando una de las habilidades matemáticas que pocas veces se aborda en el salón de clases: la Imaginación espacial. Esta misma dinámica se presenta para los poliedros de caras cuadradas y pentagonales.

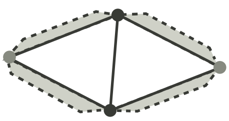


Fig. 1

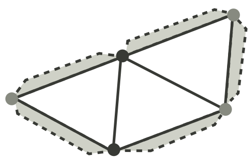


Fig. 2

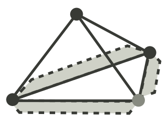


Fig. 3

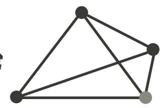


Fig. 4

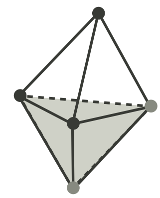
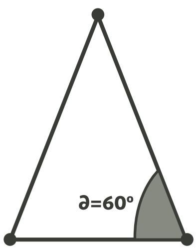
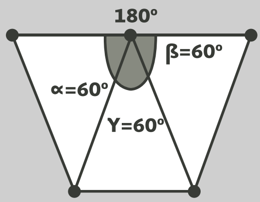
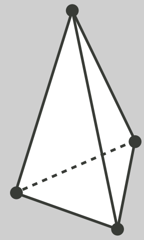
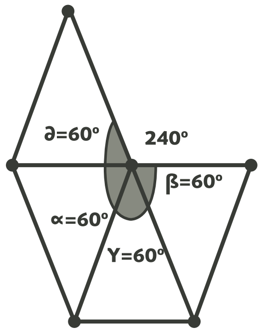
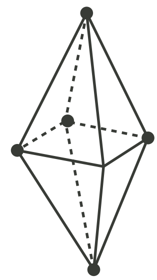
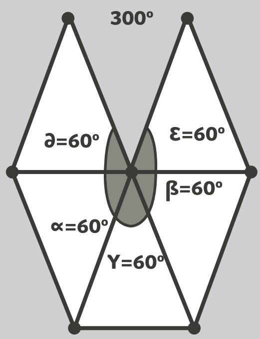
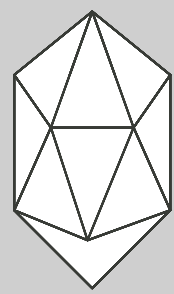
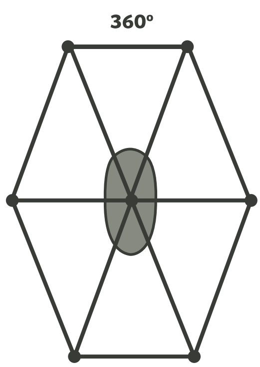


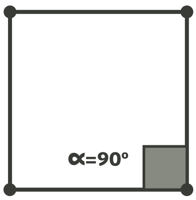
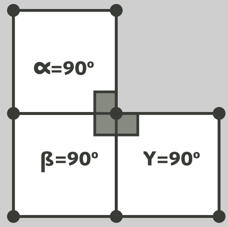
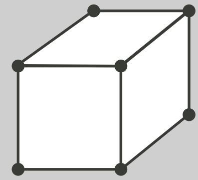
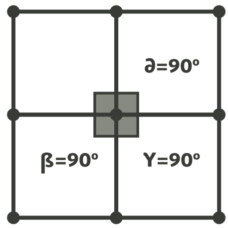
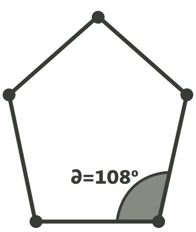
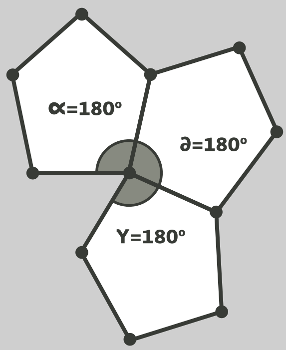
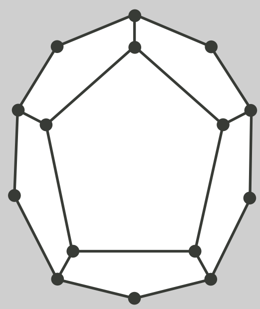
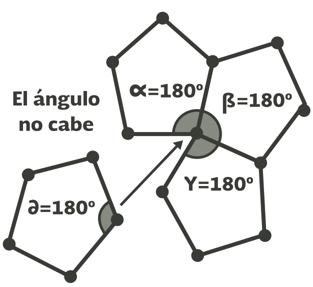
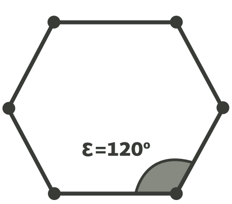
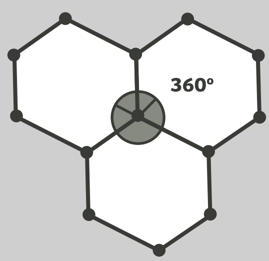
Fig. 5

a) Construcción de los polígonos regulares.

Para la construcción de los cinco poliedros regulares, se llegó a la conclusión que se plasma en siguiente cuadro, a partir de dos consideraciones importantes:

1. Todas las caras deben ser iguales, por ser regulares.
2. Los ángulos de las caras que convergen en un vértice deben sumar menos de 3600, en caso de sumar 3600 exactamente o más, no encerrarían un volumen, sino que tendrían una superficie plana o un poliedro no convexo.

Posibles caras de los poliedros	No. de caras por vértice ≥ 3	Suma de ángulos en cada vértice < 360º	Poliedros Regulares
Triángulo 	3		 Tetraedro
	4		 Octaedro
	5		 Icosaedro
	6		Imposible

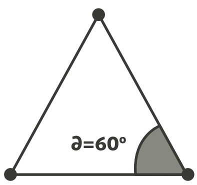
Posibles caras de los poliedros	No. de caras por vértice ≥ 3	Suma de ángulos en cada vértice < 360°	Poliedros Regulares
Cuadrado 	3		 Cubo
	4		Imposible
Pentágono 	3	Suma de ángulos=324° 	 Dodecaedro
	4		Imposible
Hexágono 	3		Imposible

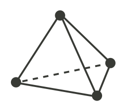
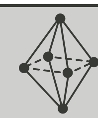
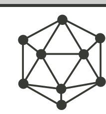
b) Análisis algebraico.

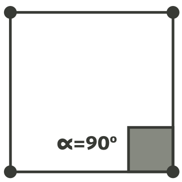
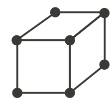
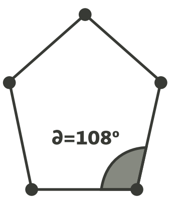
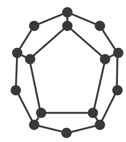
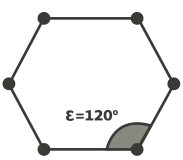
Demostración de los poliedros con la *Fórmula de Euler.*
Fórmula de Euler: X = V – A + C (V = vértice, C = caras y A = aristas)

Recordemos que para formar un polígono se necesitan, como, mínimo tres lados, porque una cara puede tener, por lo menos, tres vértices y tres lados.

Para demostrar los diferentes poliedros a través de fórmula de Euler, utilizaremos otra variable, que llamaremos “n”; n = número de caras que inciden en un vértice.

<table>
<tr><th rowspan="2">Posibles caras de los poliedros</th><th colspan="2">Vértices</th><th colspan="2">Aristas</th><th rowspan="2" colspan="2">Análisis algebraico</th></tr>
<tr><th>Polígono</th><th>Poliedro</th><th>Polígono</th><th>Poliedro</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Triángulo Equilátero

</td><td>Se inicia con una cara “C”.
En una cara triangular se tienen tres vértices.

Vértices: 3c</td><td>En el vértice de un poliedro, pueden incidir mínimo tres caras, pero también pueden ser “n” caras, por lo que 3c se divide entre “n”
Vértices=3c/n
Por lo tanto:
V= 3c/n</td><td>Un triángulo tiene tres lados, que al formar el poliedro se constituyen en tres aristas.
Aristas: 3c</td><td>3c/2
3c se divide entre dos porque, para formar un poliedro en cada arista deben incidir dos caras.
Por lo tanto;
A=3c/2</td><td colspan="2">Aplicando la fórmula de Euler
X = V – A + C
3cn − 3c2+c
3n − 32+1)c
6–3n+2n2n)c
6– n2n)c
por lo tanto:
4n6– n
Esta fórmula, servirá para determinar el número de caras que tendrá el poliedro. El denominador de la fórmula es (6 -n), expresión que es diferente de cero, por lo tanto “n” no puede ser igual a 6 o mayor, porque los resultados serían negativos. Pero “n” tampoco puede ser igual a 1 ó 2, porque en un vértice deben incidir, como mínimo, 3 caras. Por lo que “n” solo puede ser igual a los valores de 3, 4 ó 5.</td></tr>
<tr><td colspan="5">4n6 – n, es decir, cuando n = 3.
4n6 – n = 4(3) 6 – 3 =123=4. Como el resultado es 4 se forma un poliedro de cuatro caras llamado Tetraedro</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">4n6– n, es decir, cuando n = 4.
4n6– n = 4(4)6– 4=162= 8. El resultado es 8: forma un poliedro de ocho caras llamado Octaedro</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">4n6– n, es decir, cuando n = 5.
4n6– n = 4(5)6– 5=201=20 . El resultado es 20. Se forma un poliedro de veinte caras llamado Icosaedro</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Posibles caras de los poliedros</th><th colspan="2">Vértices</th><th colspan="2">Aristas</th><th rowspan="2" colspan="2">Análisis algebraico</th></tr>
<tr><th>Polígono</th><th>Poliedro</th><th>Polígono</th><th>Poliedro</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Cuadrado
</td><td>El cuadrado tiene 4 vértices.
Vértices: 4c</td><td>4 cn</td><td>Aristas: 4c</td><td>4c2
Es entre dos porque en cada arista inciden dos caras</td><td colspan="2">Aplicando la fórmula de Euler
X = V – A + C
4cn – 4c2+c
4n - 42+1)c
8–4n+2n2n)c
4– nn)c
por lo tanto:
2n4– n</td></tr>
<tr><td colspan="5">El denominador es 4 -n, expresión que no puede ser igual a cero, por lo tanto, “n” no puede ser igual a 4, por lo tanto “n” solo puede ser igual a 3.
2n4–n , es decir, cuando n = 3.
4n6– n= 4(3)6– 3=122=6. Como el resultado es 6, se forma un poliedro de seis caras llamado Cubo</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pentágono
</td><td>Vértices: 5c</td><td>5c/n</td><td>Aristas: 5c</td><td>5c2
Es entre dos porque en cada arista inciden dos caras</td><td colspan="2">X = V – A + C
5cn – 5c2+c
5n – 52+1)c
10–5n+2n2n)c
10– 3n2n)c
por lo tanto:
4n10– 3n</td></tr>
<tr><td colspan="5">El denominador es (10 -3n), expresión que es diferente de cero, pero no negativo, por lo tanto “n” solo puede ser igual a 3.
4n10– 3n, es decir, cuando n = 3.
4n10– 3n= 4(3)10– 9 =121=12. (como Eel resultado es 12 y forma un poliedro de doce caras llamado Dodecaedro</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hexágono
</td><td>Vértices: 6c</td><td>6cn</td><td>Aristas: 6c</td><td>6c2
Es entre dos porque en cada arista inciden dos caras</td><td colspan="2">Aplicando la fórmula de Euler
X = V – A + C
6cn – 6c2+c
6n – 62+1)c
12–6n+2n2n)c
12– 4n2n)c
por lo tanto:
4n12– 4n= n3– n</td></tr>
<tr><td colspan="6">En la demostración para la construcción de un poliedro con caras hexagonales, la n4– n), donde el denominador es 4 – n, si “n” es igual a 4 o mayor, “c” es igual a cero o negativo, y así es imposible la construcción de un poliedro.</td></tr>
</table>

Conclusiones

Los docentes que participaron en la experiencia o estudio consideraron la propuesta exitosa para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, porque la construcción con material como la cartulina y el análisis algebraico de los cinco poliedros platónicos facilitó la comprensión de las propiedades invariantes de los sólidos. Al principio del taller se presentaron algunos conflictos en la construcción de las formas geométricas, por ejemplo, determinar el número de caras y la suma de ángulos que inciden en un vértice, así como deducir las fórmulas para determinar el número de caras a través de la fórmula de Euler, en el proceso analítico del análisis algebraico.

Las dificultades fueron superadas con la ayuda del material concreto, ya que ayudó al docente participante a elaborar experimentos, demostraciones y reflexiones sobre los cinco poliedros regulares. También se reflejó que la metodología tradicional. Algunos problemas de la educación en México en la enseñanza-aprendizaje (Peña,2004), puede modificarse, ya que, al usar material concreto en el aprendizaje, con el apoyo del análisis algebraico de la construcción, propicia una introyección de los contenidos. Además, se demostró, que, con la implementación de estrategias con material concreto y el análisis algebraico, se conformó un ambiente de aprendizaje que propició la reflexión, análisis y actitud crítica en la resolución de problemas, ya que el proceso de construcción transitó en los tres momentos de la teoría por descubrimiento —concreto, icónico y abstracto—.

Referencias

Ángel, Juan., Bautista, Guillermo. (2001). *Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: La utilización de software especializado*. Recuperado el 12 de enero de 2005 de http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html

Bruner, J. (1972). *El proceso de la educación*. Hispanoamericana, México

Claret, A. (2005). *Cómo hacer y defender una tesis*. Texto, Caracas

García y Bertrán (1995). *Geometría y experiencias*. Alambra. México.

Lozano, M. (2017) La conjetura de Poincaré. *Métode Science Studies Journal 60*( ) 89-91.

Morris (1998). Matemáticas: *La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI. México.

Peña, J (Comp.) (2004). *Algunos problemas de la educación en México*. Siglo XXI.

Platón (1900). *Timeo*. Losada.

Prieto, C (2005). *Aventura de un duende en el mundo de las matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, México.

Sessa, C (2008). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Libros del Zorzal.